

付録

標本化定理とエリアシング

1. 標本化定理

どのような大きさの標本化間隔で標本化すればよいかは、シャノン(Shannon)の“標本化定理(sampling theorem)”(ナイキストの定理ともいう)によって知ることができる。

以下、説明を簡単化するため、1次元で標本化定理を考えると、次のようになる。

周波数スペクトル $F(u)$ をもつ 1次元画像関数 $f(x)$ に含まれる空間周波数成分が、 U 以下であるか、あるいは U 以下に帯域制限されている(band limited)とき、すなわち図 1 に示すように、

$$F(u) = 0, \quad |u| \geq U \quad (1)$$

が成立するとき、画像 $f(x)$ は標本点 $(x = m/2U)$ における標本値 $f(m/2U)$ を用いて、

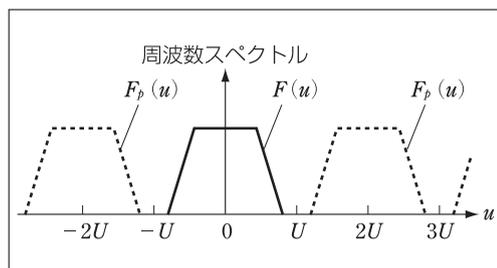


図 1 標本化定理の説明図(1)

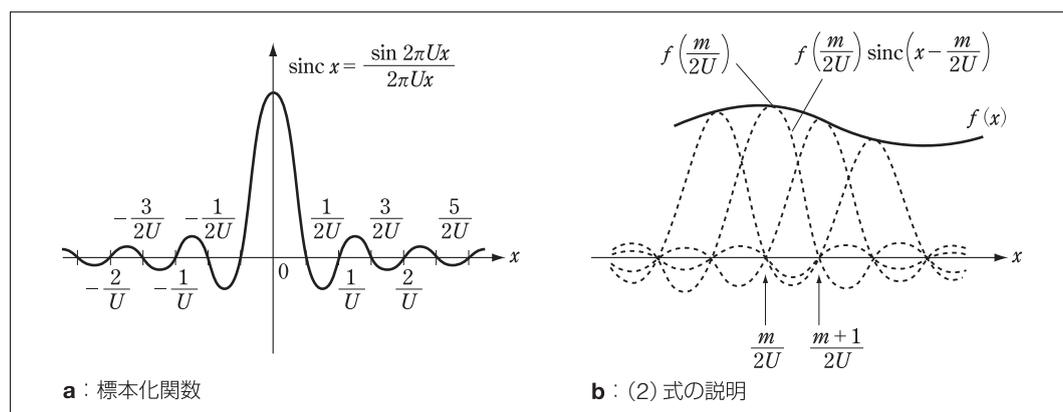


図 2 標本化定理の説明図(2)

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{m}{2U}\right) \text{sinc}\left(x - \frac{m}{2U}\right) \quad (2)$$

と表される。ただし、 m は整数で、

$$\text{sinc } x = \frac{\sin 2\pi Ux}{2\pi Ux} \quad (3)$$

は sinc 関数(または標本化関数)とよばれ、図 2 に示す。

標本化定理の証明は、以下のようになる。

(証明)

$f(x)$ は(1)式のように帯域制限されているので、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(j2\pi ux) du \quad (4)$$

$$= \int_{-U}^U F(u) \exp(j2\pi ux) du \quad (5)$$

となる。ここで、図 1 のような $F(u)$ が周期 $2U$ で繰り返される $F_p(u)$ を考えると、これは周期関数であるから、フーリエ級数展開

$$F_p(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp\left(\frac{-j2\pi mu}{2U}\right) \quad (6)$$

が得られ、ここでフーリエ係数 C_m は

$$C_m = \left(\frac{1}{2U}\right) \int_{-U}^U F_p(u) \exp\left(\frac{j2\pi mu}{2U}\right) du \quad (7)$$

$$= \left(\frac{1}{2U}\right) \int_{-U}^U F(u) \exp\left(\frac{j2\pi mu}{2U}\right) du \quad (8)$$

である。一方、(5)式で $x = m/2 U$ とおけば、

$$f\left(\frac{m}{2U}\right) = \int_{-U}^U F(u) \exp\left(\frac{j2\pi mu}{2U}\right) du \quad (9)$$

を得る。(8)式と(9)式を比較して、

$$C_m = \left(\frac{1}{2U}\right) f\left(\frac{m}{2U}\right) \quad (10)$$

なる関係が得られる。

(5)式、(6)式、および(10)式から、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-U}^U F(u) \exp(j2\pi ux) du \quad (5) \\ &= \int_{-U}^U F_p(u) \exp(j2\pi ux) du \\ &= \int_{-U}^U \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2U}\right) f\left(\frac{m}{2U}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left(\frac{-j2\pi mu}{2U}\right) \right\} \exp(j2\pi ux) du \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2U}\right) f\left(\frac{m}{2U}\right) \\ &\quad \times \int_{-U}^U \exp\left\{j2\pi u\left(x - \frac{m}{2U}\right)\right\} du \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{m}{2U}\right) \operatorname{sinc}\left(x - \frac{m}{2U}\right) \quad (2) \end{aligned}$$

となり、定理が証明された。図 2 b は(2)式の説明をしている図である。破線の波形の Σ (総和) が実線 $f(x)$ となる。

以上を 2 次元に拡張すると、次のような 2 次元標本化定理となる。

フーリエ変換 $F(u, v)$ をもつ 2 次元画像関数 $f(x, y)$ に含まれる空間周波数成分が、 (U, V) 以下であるか、あるいは、 (U, V) 以下に帯域制限されているとき、すなわち

$$F(u, v) = 0, \quad |u| \geq U, \quad |v| \geq V \quad (11)$$

が成立するとき、画像 $f(x, y)$ は標本点 $(x = m/2 U, y = n/2 V)$ における標本値 $f(m/2 U, n/2 V)$ を用いて、

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{m}{2U}, \frac{n}{2V}\right) \\ &\quad \times \operatorname{sinc}\left(x - \frac{m}{2U}\right) \operatorname{sinc}\left(y - \frac{n}{2V}\right) \quad (12) \end{aligned}$$

と表現できる。

また、以上を簡単に記述すれば、2 次元画像

$f(x, y)$ が

$$\Delta x = \frac{1}{2U} \quad (13)$$

$$\Delta y = \frac{1}{2V} \quad (14)$$

の間隔、またはそれ以下の間隔で標本化されるならば、原画像に含まれるすべての情報は保存されると表現できる。

この標本化間隔の逆数 $1/\Delta x$, $1/\Delta y$ で計算される値は、標本化周波数とよばれる。

2. ナイキスト周波数とエリアシング

標本化とエリアシングについて、図 3 a のような 1 次元の実空間領域の関数 $f(x)$ と、図 3 b のようなそのフーリエ変換(周波数スペクトル) $F(u)$ を用いて、同図と対応させながら以下に説明する。ここで、図 3 b のスペクトルのもつ最高周波数を U とする。

まず、図 3 c のような関数 $s(x)$ を考えると、これは次式のようなデルタ関数列によって表される〔デルタ関数については第 1 編第 3 章も参照〕。

$$s(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x) \quad (15)$$

これは、くし型関数(comb function)とよばれる。このフーリエ変換 $S(u)$ は図 3 d のように同じくデルタ関数列になり、

$$S(u) = \left(\frac{1}{\Delta x}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - \frac{m}{\Delta x}\right) \quad (16)$$

である。いま、画像 $f(x)$ の標本化された画像関数 $f_s(x)$ は、 $f(x)$ と $s(x)$ との積であり、

$$f_s(x) = s(x)f(x) \quad (17)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m\Delta x) \delta(x - m\Delta x) \quad (18)$$

として表される(図 3 e)。このような実空間領域における操作は、空間周波数領域では $F(u)$ と $S(u)$ との畳み込み積分(*の記号で表記)に対応する。すなわち、標本化された画像 $f_s(x)$ のフーリエ変換 $F_s(u)$ は、

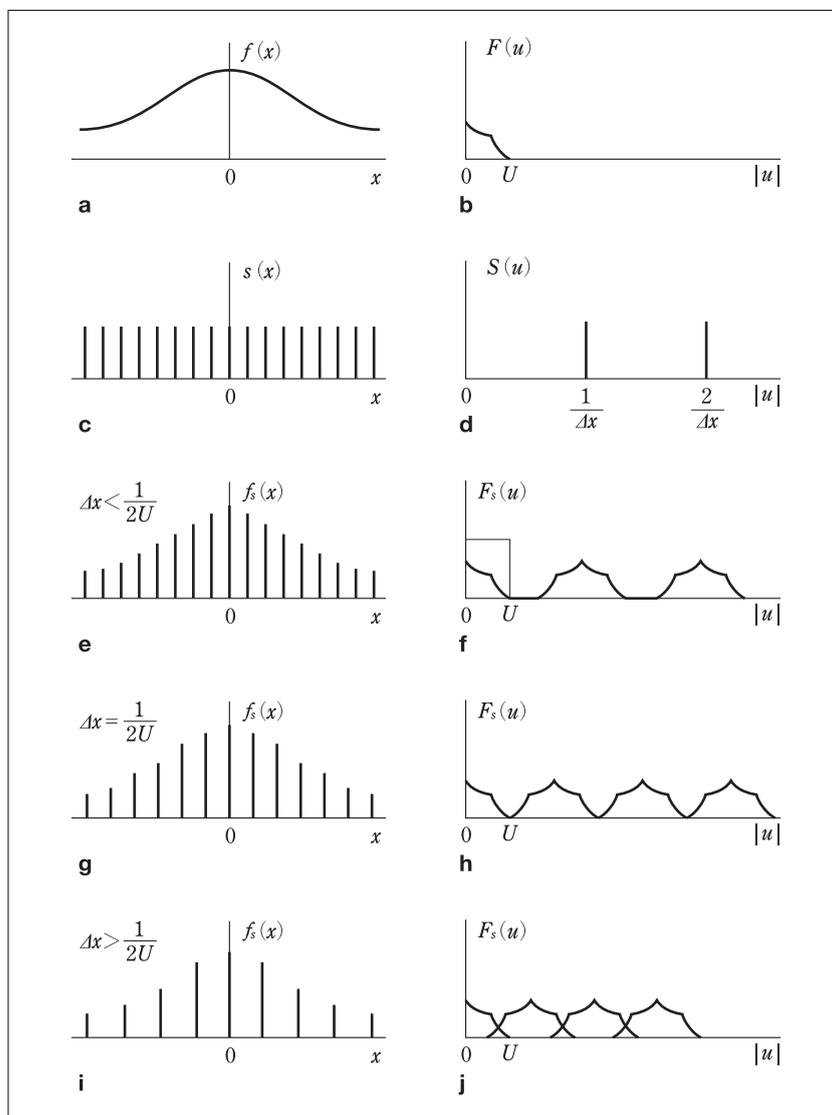


図3 標本化と周波数スペクトル

$$F_s(u) = F(u) * S(u) \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &= F(u) * \left(\frac{1}{\Delta x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - \frac{m}{\Delta x}\right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ F(u) * \delta\left(u - \frac{m}{\Delta x}\right) \right\} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(u - \frac{m}{\Delta x}\right) \right) \end{aligned} \tag{20}$$

である。

この結果、図3fに示すように、 $F(u)$ が周期的に繰り返された形のものになる。原点付近のスペ

クトル以外の成分は、エイリアスとよばれる。ここで図3fは、(2)式の標本化定理を十分満足するような場合で(オーバーサンプリング)、(13)式で計算される標本化間隔 Δx よりも小さな間隔をもつ $s(x)$ で標本化されるときである。

また、図3gのように、ちょうど標本化定理を満足するときの $s(x)$ で標本化されるときには、図3hのようになる。これらの場合には、図3fの中に示されているような矩形関数を用いることに

より、原画像のスペクトルが再現される。

しかしながら、図 3 i のような $s(x)$ でアンダーサンプリングされるときには、図 3 j のようにエイリアス成分が重なり加法され、もはや分離は不可能で、 $F(u)$ とは異なったスペクトルが得られる。これをエイリアシング(aliasing)が発生したというが、ちょうど $F(u)$ の $U/2$ 以上の高周波数成分を低周波数側に折り返して加算された状態と同じである。また、この成分を雑音とみなして、折り返し雑音(エイリアシング雑音, エイリアシング誤差)ともよばれる。エイリアシングが起こると、高い周波数のものが低い周波数のものに見誤られてしまう。

この標本化周波数の半分の周波数である“折り返しの周波数”は、標本化間隔を Δx (または、 Δy)としたとき、

$$u_N = \frac{1}{2\Delta x} \quad (21)$$

で計算され、 u_N はナイキスト周波数(Nyquist frequency)とよばれる。ここで、標本化定理を満足するということは、 $u_N = U$ になるということである。

以上は、簡単化のために 1 次元で説明したが*¹ 実際の画像では 2 次元的にエイリアシング効果を考慮する必要がある。

(藤田広志)

*¹ 図 3 の説明では、実空間の画像データが無限の場合を仮定していたが、データを取り出す区間が有限のときには事情が異なってくる。さらに、離散的フーリエ変換では、周波数空間における変数値も離散化される。これらについては省略する。興味ある読者は、たとえば、英保茂：医用画像処理，朝倉書店，1992 を参照されたい。